ENSEÑANZA DE LAS CIENCIAS, 36.1 (2018): 143-162
Investigaciones didácticas

https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2291
ISSN (impreso): 0212-4521 / ISSN (digital): 2174-6486

# La *coordinación de las aproximaciones* en la comprensión del concepto de límite cuando los estudiantes para profesor anticipan respuestas de estudiantes

## *Coordination of approximations* in the understanding of the limit concept when prospective teachers anticipate students' answers

Ceneida Fernández
*Universidad de Alicante (España)*
ceneida.fernandez@ua.es

Gloria Sánchez-Matamoros
*Universidad de Sevilla (España)*
gsanchezmatamoros@us.es

Mar Moreno
*Universidad de Alicante (España)*
mmoreno@ua.es

María Luz Callejo
*Universidad de Alicante (España)*
luz.callejo@ua.es

RESUMEN • El objetivo de este estudio es examinar en qué medida la identificación de la coordinación de las aproximaciones en el dominio y el rango de una función es considerado un avance conceptual (KDU en Simon, 2006) en la comprensión del concepto de límite de una función por futuros profesores. Veinticinco estudiantes para profesor de matemáticas anticiparon respuestas de estudiantes de bachillerato a problemas sobre el límite de una función que mostraban distintas características de la comprensión y propusieron problemas para apoyar el progreso conceptual de los estudiantes. Los resultados muestran que identificar la coordinación de las aproximaciones en el dominio y el rango como KDU permitió a los estudiantes para profesor considerar progresiones en el aprendizaje sobre las que apoyar sus propuestas de enseñanza.

PALABRAS CLAVE: conocimiento del profesor; concepto de límite de una función; anticipación de respuestas; *Key Developmental Understanding* (*KDU*).

ABSTRACT • The aim of this study is to examine to what extent the identification of the coordination of approximations in the domain and in the range is considered a Key Developmental Understanding (KDU in Simon, 2006) by prospective teachers. 25 prospective secondary school mathematics teachers anticipated high school students' answers to problems about the limit of a function showing different characteristics of understanding and proposed problems that would support students' conceptual progress. Results show that identifying the coordination of the approximations in the domain and in the range as KDU allowed prospective teachers to consider progressions in students' learning in order to support their teaching decisions.

KEYWORDS: teacher knowledge; concept of limit of a function; anticipation of answers; Key Developmental Understanding (KDU).

Recepción: enero 2017 • Aceptación: octubre 2017 • Publicación: marzo 2018

Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G., Moreno, M., & Callejo, M. L. (2018). La *coordinación de las aproximaciones* en la comprensión del concepto de límite cuando los estudiantes para profesor anticipan respuestas de estudiantes. *Enseñanza de las ciencias, 36*(1), 143-162.

## INTRODUCCIÓN

Entre las diferentes tareas profesionales que tiene que realizar un profesor cuando planifica una clase está la propuesta de actividades relacionadas con los objetivos de aprendizaje (Smith y Stein, 2011). Para la propuesta de estas actividades es necesario que el profesor anticipe posibles respuestas y dificultades de los estudiantes. Aunque la competencia para realizar esta tarea profesional se puede desarrollar a través de la experiencia profesional, en la formación inicial es posible empezar a desarrollarla (Didis, Erbas, Cetinkaya, Cakiroglu y Alacaci, 2016; Smith y Stein, 2011).

Stahnke, Schueler y Roesken-Winter (2016) realizaron una revisión sistemática de las investigaciones empíricas en el ámbito de la educación matemática sobre las tareas profesionales de anticipación, interpretación y toma de decisiones, indicando que la mayoría de los estudios se centraban en cómo los estudiantes para profesor interpretan el pensamiento matemático de los estudiantes (la competencia de mirar de manera profesional el pensamiento matemático de los estudiantes). Sin embargo, pocos estudios se centran en la forma en la que los futuros profesores anticipan posibles respuestas de los estudiantes como una tarea profesional integrada en la planificación (Bergqvist, 2005; Llinares, Fernández y Sánchez-Matamoros, 2016; Sen-Zeytun, Cetinkaya y Erbas, 2010).

La importancia de la tarea de anticipar respuestas de estudiantes que muestren diferentes características de la comprensión también se pone de manifiesto en la caracterización del conocimiento de matemáticas para la enseñanza de Ball, Thames y Phelps (2008):

> Los profesores deben anticipar lo que los estudiantes probablemente piensen y aquello en que tengan dificultades. Cuando escojan un ejemplo, los profesores necesitan predecir lo que los estudiantes pueden considerar interesante y motivador. Cuando escojan una tarea, los profesores necesitan anticipar lo que los estudiantes harán y si ellos encontrarán la tarea fácil o difícil. […]. Cada una de estas tareas requiere una interacción específica entre el conocimiento de matemáticas y la familiaridad con el estudiante y su pensamiento matemático (p. 401; traducción de las autoras).

Esta caracterización subraya la importancia de que el profesor anticipe e interprete lo que los estudiantes pueden hacer cuando están resolviendo ciertos problemas matemáticos para ayudarles a progresar en su aprendizaje (Norton, McCloskey y Hudson, 2011). Como consecuencia, los formadores de profesores han empezado a diseñar recursos para ayudar a los estudiantes para profesor a centrar su atención en las progresiones del aprendizaje del estudiante (Herbst, Chazan, Chen, Chieu y Weis, 2011; Wilson, Sztajn, Edgington y Myers, 2015).

El foco en el diseño de recursos ha puesto de manifiesto la importancia de la relación entre conocimiento de matemáticas y conocimiento sobre el pensamiento matemático de los estudiantes. En los últimos años, esta relación ha sido objeto de estudio en las investigaciones sobre la formación de futuros profesores de matemáticas centradas en la tarea de interpretar el pensamiento matemático de los estudiantes. Estas investigaciones muestran la necesidad de que los futuros profesores identifiquen los elementos matemáticos importantes de un concepto como paso previo a reconocer la comprensión del estudiante. Por ejemplo, la investigación de Bartell, Webel, Bowen y Dyson (2013) se centra en reconocer evidencias de la comprensión conceptual de las fracciones y decimales; las investigaciones de Callejo, Fernández, Sánchez-Matamoros y Valls (2014) y Callejo y Zapatera (2017) reconocen evidencias de la comprensión del proceso de generalización en estudiantes de primaria y secundaria en un contexto de generalización de patrones. Asimismo, Imre y Akkoç (2012) se centran en el conocimiento del contenido pedagógico de patrones numéricos en primaria; Magiera, van den Kieboom y Moyer (2013) en la relación entre el uso del pensamiento algebraico y la representación de funciones, y Sánchez-Matamoros, Fernández y Llinares (2015) en la comprensión del concepto de derivada.

Nuestro estudio se enmarca en esta línea de investigación. Examinamos la relación entre conocimiento de matemáticas y conocimiento sobre el pensamiento matemático de los estudiantes, cuando los estudiantes para profesor anticipan respuestas de estudiantes que muestren diferentes características de la comprensión del concepto de límite de una función en un punto.

## MARCO TEÓRICO

Teniendo en cuenta las líneas de investigación sobre las que se apoya nuestro estudio, organizamos este apartado en dos bloques, el primero relacionado con aspectos del conocimiento del profesor, y el segundo con el concepto de límite de una función y la problemática de su enseñanza y aprendizaje.

### Conocimiento del profesor y tarea profesional de anticipar respuestas de los estudiantes

En el modelo teórico del conocimiento de matemáticas para enseñar (Mathematical Knowledge for Teaching, MKT), Bally *et al.* (2008) describen el conocimiento especializado del contenido (SCK por sus siglas en inglés) como las formas de conocer las matemáticas que son particularmente útiles en la comprensión de las matemáticas de los estudiantes, y el conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS por sus siglas en inglés) como el conocimiento de las formas en que los estudiantes dotan de sentido (comprenden) a una cierta idea matemática.

Cuando los futuros profesores piensan sobre la manera en la que los estudiantes resolverán determinados problemas deben ser capaces de reconocer qué puede ser una evidencia de la progresión en el aprendizaje. En este contexto, Llinares *et al.* (2016) consideran que el constructo *Key Developmental Understanding* (KDU) propuesto por Simon (2006) podría ser utilizado para examinar cómo se relacionan conocimiento especializado del contenido (SCK) y conocimiento del contenido y de los estudiantes (KCS) cuando los estudiantes para profesor realizan hipótesis sobre el pensamiento matemático del estudiante al anticipar posibles respuestas a los problemas.

Un KDU implica un avance conceptual por parte de los estudiantes, es decir, un cambio en la capacidad para pensar y/o percibir determinadas relaciones matemáticas (Simon, 2006: 362). Por lo tanto, un KDU se convierte en un elemento clave para el desarrollo de un concepto. Desde esta perspectiva, para reconocer la progresión en el aprendizaje de los estudiantes es necesario conocer los elementos matemáticos cuya comprensión pueda ser considerada un avance conceptual. Podríamos decir que reconocer los KDU de un concepto se encuentra en la intersección del conocimiento especializado del contenido (SCK) y del conocimiento del contenido y los estudiantes (KCS).

Nuestro estudio se apoya en el supuesto de que si los futuros profesores centran su atención en los KDU del concepto de límite de una función pueden aprender a generar hipótesis sobre cómo se desarrolla la comprensión matemática de los estudiantes.

### Síntesis de las características de la comprensión del concepto de límite

La comprensión del límite de una función real de variable real es un aspecto importante del currículum de bachillerato. Sin embargo, las investigaciones han puesto de manifiesto que el concepto de límite es una noción difícil para los estudiantes (Contreras y García, 2015; Fernández-Plaza, Ruiz-Hidalgo y Rico, 2015; Juter, 2010; Tall, 1992). Cornu (1991) afirma que una de las grandes dificultades emana de la complejidad de entender que todos los aspectos cognitivos del concepto de límite no se pueden aprender partiendo de su definición matemática. Uno de estos aspectos es la idea de aproximación, cuyo primer contacto lo tienen los estudiantes a través de la concepción dinámica de límite.

La concepción dinámica como *aproximación óptima* (Blázquez y Ortega, 2002) puede ser definida como: «Sea f una función y a un número real, el número L es el límite de la función f en el punto a, y se debiera escribir $\lim_{x \to a}$ f(x), si cuando x se acerca al número a más que cualquier aproximación, sus imágenes f(x) se acercan a L más que cualquier otra aproximación fijada». Esta manera de dar sentido a la idea de límite influye en la comprensión de la concepción métrica:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists \partial > 0 \ \textit{tal que}\ \forall x,\ 0 < |x-a| < \partial \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Cottrilly *et al.* (1996) sugieren que la dificultad de los estudiantes para comprender la definición métrica del límite puede ser el resultado de una comprensión insuficiente de la concepción dinámica. Relacionar la coordinación de los dos procesos de aproximación, en el dominio y en el rango de la función, con la cuantificación derivada de la concepción métrica hace que el concepto de límite sea difícil para muchos estudiantes. Desde este punto de vista, para superar esta dificultad, los estudiantes deben coordinar un proceso de aproximación en el dominio con un proceso de aproximación en el rango a través de la función considerando diferentes modos de representación.

El papel de las distintas representaciones en la comprensión del concepto de límite ha sido ampliamente investigado (Blázquez, Ortega, Gatica y Benegas, 2006; Espinosa y Azcárate, 2000; Güçler, 2013; Kidron, 2010; Lacasta y Wilhelmi, 2010) desde la conexión entre los tipos de límite: límite de una sucesión, de una función en un punto y de una función que tiende al infinito (Fernández-Plaza y Simpson, 2016). Un resultado es que la identificación del límite por parte de los estudiantes se realiza con más facilidad en forma gráfica y numérica que en forma algebraica (Blázquez y Ortega, 2001; Sierra, González y López, 2000).

Asimismo, el papel de la coordinación de los procesos de aproximación en los diferentes modos de representación resulta clave en la comprensión del concepto de límite. En este sentido, y partiendo de la concepción dinámica de límite de una función en un punto, que implica construir un proceso en el dominio en el cual *x* se aproxima a *a*, construir otro proceso en el rango en el cual *f*(*x*) se aproxima a *L*, y utilizar la función para coordinarlo, Pons (2014) identificó que los elementos matemáticos relevantes para su comprensión son las ideas de: *i*) función, *ii*) aproximación en el dominio y en el rango y *iii*) coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango a través de la función *f*.

Pons, Valls y Llinares (2012), Valls, Pons y Llinares (2011) y Pons (2014) caracterizan niveles de comprensión del límite de una función desde el punto de vista de la coordinación de las aproximaciones en diferentes modos de representación. Estos autores indican que la característica que determina el paso de un nivel a otro de comprensión es la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango cuando las aproximaciones laterales no coinciden. En un primer nivel, los estudiantes coordinan las aproximaciones coincidentes en el dominio y en el rango a lo sumo en un modo de representación. En un segundo nivel, los estudiantes coordinan las aproximaciones coincidentes en el dominio y en el rango en uno o dos modos de representación, y cuando las aproximaciones laterales no son coincidentes la coordinación solo se realiza en un modo de representación. En un tercer nivel, los estudiantes coordinan las aproximaciones coincidentes en el dominio y en el rango en los tres modos de representación (gráfico, numérico y algebraico), y cuando las aproximaciones laterales no coinciden coordinan al menos en dos modos. En relación con los modos de representación indican que los estudiantes acceden al significado dinámico de límite mediante la utilización del modo de representación gráfico cuando las aproximaciones laterales coinciden, progresan en modo numérico y consolidan en modo algebraico-numérico.

Una evidencia del avance conceptual en la comprensión de la concepción dinámica del límite es la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango en los diferentes modos de representación. El objetivo de esta investigación es analizar cómo los estudiantes para profesor reconocen la coordinación entre las aproximaciones en el dominio y el rango en los diferentes modos de representación, como un avance conceptual en el aprendizaje del concepto de límite de una función en estudiantes de bachillerato a través de una tarea de anticipación. Nos preguntamos: «¿En qué medida reconocer la coordinación de las aproximaciones en el dominio y el rango de una función como un avance conceptual (KDU) ayuda a los estudiantes para profesor a generar hipótesis sobre el pensamiento matemático de los estudiantes?».

## MÉTODOS

### Participantes y contexto

Los participantes fueron 25 estudiantes para profesor de matemáticas de educación secundaria matriculados en el Máster Universitario de Formación en Profesorado de Educación Secundaria. Estos estudiantes para profesor tenían diferente formación en relación con las matemáticas (graduados en matemáticas, ingenieros y arquitectos) y estaban matriculados en una asignatura cuyo objetivo era aprender a reconocer características de la comprensión de los estudiantes de educación secundaria y bachillerato de diferentes conceptos matemáticos, para proponer actividades de apoyo a la progresión de su comprensión. Uno de los conceptos matemáticos analizados fue el de límite funcional por su importancia en el aprendizaje del cálculo.

Los estudiantes para profesor se agruparon en grupos de cinco para responder a una tarea de anticipación. Antes de esta tarea, los estudiantes para profesor resolvieron tres problemas de límite de una función en un punto, adaptados de un libro de texto de bachillerato (Colera *et al.*, 2008; figura 1). El objetivo era que los estudiantes para profesor identificaran los elementos matemáticos necesarios para su resolución. Por otra parte, la tarea de anticipación se realizó antes de proporcionar información acerca de las características de la comprensión de estudiantes de bachillerato en relación con el límite funcional. La información de este tipo de estudio es importante para los formadores de profesores de matemáticas ya que determina el nivel de competencia de las distintas tareas profesionales que tienen los estudiantes para profesor, lo cual puede ser útil para el diseño de la instrucción.

### Tarea de anticipación

La tarea de anticipación constaba de los tres problemas de límite de una función en un punto previamente resueltos y tres preguntas profesionales (figura 1).

El objetivo de las preguntas *a*) y *b*) era que los estudiantes para profesor generaran respuestas de hipotéticos estudiantes de bachillerato con diferentes niveles de comprensión del concepto de límite de una función en un punto. El objetivo de la pregunta *c*) era que los estudiantes para profesor, después de determinar características de la comprensión del concepto de límite del estudiante, propusieran actividades que permitieran progresar al estudiante en su comprensión del concepto.

Para la resolución de la tarea se proporcionó un documento teórico con la definición de la concepción dinámica de límite y los elementos matemáticos que la conforman (Pons, 2014; Pons *et al.*, 2012; Valls *et al.*, 2011) a fin de unificar el vocabulario que se podía usar para describir los problemas desde el punto de vista de: *i*) la idea de función, *ii*) la idea de aproximación lateral por la derecha y por la izquierda (en el dominio y en el rango, sean o no coincidentes) y *iii*) la idea de coordinación, a través de la función, de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango considerando distintos modos de representación (gráfico, algebraico y numérico).

**Problema 1**

Sea la función

$$f(x)=\begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x \le 1 \\ 4 & \text{si} \quad 1 < x \le 2 \\ x^2 & \text{si} \quad x > 2 \end{cases}$$

Calcula el límite de $f(x)$ cuando:

a) $x$ tiende a 1

b) $x$ tiende a 2

**Problema 2**

Sean las tablas

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_1$ | 0,8 | 0,9 | 0,99 | … | 1,2 | 1,1 | 1,01 |
| $f(x_1)$ | 1,64 | 1,81 | 1,9201 | … | 2,44 | 2,21 | 2,0201 |

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x_2$ | 0 | 0,9 | 0,99 | … | 1,1 | 1,01 | 1,001 |
| $f(x_2)$ | 0 | -0,99 | -0,9999 | … | 2,3 | 2,03 | 2,003 |

a) ¿a qué valor se acercan

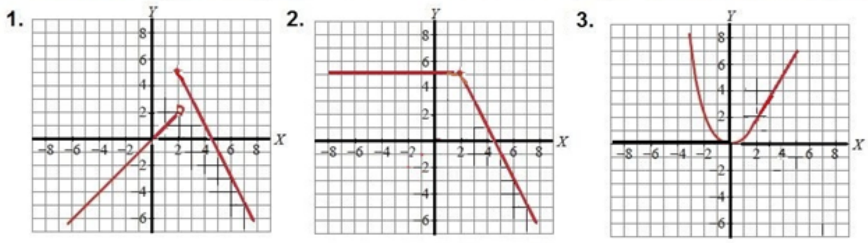
1. $x_1$ y $x_2$ por la derecha y por la izquierda
2. las imágenes de $f(x_1)$ por la derecha y por la izquierda
3. las imágenes de $g(x_2)$ por la derecha y por la izquierda?

b) ¿a qué valor se acercan

1. las imágenes de $f(x_1)$ en relación al valor que se acerca $x_1$
2. las imágenes de $g(x_2)$ en relación al valor que se acerca $x_2$?

**Problema 3**

Relaciona las siguientes gráficas con las afirmaciones a, b y c. Justifica tus repuestas




a) El límete de la función es 2 en $x = 2$
b) El límite de la función es 5 en $x = 2$
c) No existe el límite de la función en $x = 2$

a) Indica que tendría que hacer y decir exactamente María, una alumna de 1º de Bachillerato, en cada problema, para indicar que ha comprendido el objetivo de aprendizaje. Justifica tu respuesta a partir de los elementos matemáticos y modos de representación.

b) Indica lo que tendría que hacer y decir exactamente Pedro, otro alumno de 1º de Bachillerato, en cada problema, para que muestre que tiene ciertas características de la comprensión del concepto de límite pero que no ha sido capaz de alcanzar el objetivo de aprendizaje. Justifica tu respuesta a partir de los elementos matemáticos y modos de representación.

c) Como profesor de estos alumnos propón actividades concretas:
- para confirmar que María ha alcanzado el objetivo de aprendizaje pretendido. Justifica tu respuesta a partir de los elementos matemáticos y modos de representación.
- para que Pedro alcance el objetivo de aprendizaje pretendido. Justifica tu respuesta a partir de los elementos matemáticos y modos de representación.

Fig. 1. Tarea de anticipación propuesta a los estudiantes para profesor.

De esta manera, el análisis de los tres problemas, junto con la información proporcionada, permite que los futuros profesores puedan generar un discurso profesional sobre los problemas, poniendo el foco de atención sobre los elementos matemáticos necesarios para desarrollar una concepción dinámica del límite de una función.

El problema 1 se presenta en modo algebraico con límites laterales no coincidentes en $x = 1$ (apartado a) y coincidentes en $x = 2$ (apartado b). Los elementos matemáticos implicados en la resolución son: *i*) función definida a trozos, *ii*) las aproximaciones en el dominio en $x = 1$ y $x = 2$, y aproximaciones en el rango para determinar el comportamiento de $f(x)$alrededor de $f(x) = 3$ y $f(x) = 4$, y *iii*) la coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango alrededor de $x = 1$ y $x = 2$.

El problema 2 se presenta en modo numérico. En la primera tabla del enunciado, los límites laterales son coincidentes y en la segunda no lo son (aunque la manera en la que se presentan las sucesiones no es la común, los estudiantes para profesor no tuvieron problemas para interpretarlas). Los elementos matemáticos implicados en la resolución son: *i*) las funciones dadas y *ii*) las aproximaciones en el dominio y en el rango. En la primera tabla, $x_1$ se aproxima a 1 por la izquierda y por la derecha (a1), mientras que en el rango $f(x_1)$ se aproxima a 2 por la izquierda y por la derecha (a2). En la segunda tabla, cuando $x_2$ se aproxima a 1 por la derecha y por la izquierda, $g(x_2)$ se aproxima a -1 por la izquierda y a 2 por la derecha; y *iii*) la coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango.

Finalmente, el problema 3 se presenta en modo gráfico. En la primera gráfica del enunciado los límites laterales no coinciden en $x = 2$, en la segunda y tercera son coincidentes, existiendo el límite de la función en $x = 2$. Los elementos matemáticos implicados en la resolución son: *i*) las funciones dadas; *ii*) las aproximaciones en el dominio: en la gráfica 1, $x$ se aproxima a 2 por la izquierda y por la derecha y aproximaciones en el rango: $f(x)$ se aproxima a 2 por la izquierda y a 5 por la derecha; *iii*) la coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango: cuando $x$ se aproxima a 2 por la izquierda, $f(x)$ se aproxima a 2, cuando $x$ se aproxima a 2 por la derecha, $f(x)$ se aproxima a 5.

## Análisis

Los datos de esta investigación son las respuestas escritas de los cinco grupos de estudiantes para profesor a la tarea de anticipación (figura 1). Mediante un proceso inductivo (Strauss y Corbin, 1994), se generaron categorías sobre cómo estos grupos anticiparon respuestas de estudiantes de bachillerato que mostraran diferentes niveles de comprensión del concepto del límite y sobre las diferentes decisiones instruccionales tomadas para el progreso conceptual del estudiante. Cuatro investigadoras analizaron primero una pequeña muestra y discutieron las categorías generadas. Una vez se logró acuerdo, se añadieron nuevos datos con el fin de revisar el sistema de categorías creado inicialmente, lo que generó las categorías finales.

Con relación a cómo los estudiantes para profesor anticipan las respuestas de estudiantes mostrando distinta comprensión del concepto de límite se generaron dos categorías dependiendo de cómo los participantes consideraban el *aprendizaje del concepto de límite de una función* (tabla 1).

Tabla 1.
Categorías sobre cómo los estudiantes
para profesor anticipan las respuestas de los estudiantes de bachillerato

| Categoría | Descriptores |
|---|---|
| Dicotomía *todo o nada* | Consideran dos tipos de respuesta en los estudiantes de bachillerato:<br>– las respuestas de quienes comprenden todo, esto es, son capaces de coordinar las aproximaciones en el dominio y en el rango en los diferentes modos de representación;<br>– las respuestas de quienes no comprenden nada, por lo que no llegan a coordinar en ningún modo de representación. |
| Progresiones en el aprendizaje | Consideran progresiones en el aprendizaje del estudiante de bachillerato evidenciadas por:<br>– relacionar la falta de comprensión con la idea de no coordinar en algún modo representación;<br>– usar la idea de coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango en nuevas situaciones para el estudiante. |

Con relación a las diferentes decisiones instruccionales dadas por los estudiantes para profesor se generaron tres categorías que se indican en la tabla 2.

Tabla 2.
Categorías generadas en relación con las decisiones
instruccionales dadas por los estudiantes para profesor

| Categoría | Descriptores |
|---|---|
| Decisiones generales | No proponen actividades concretas. |
| Decisiones basadas en contenidos curriculares | Actividades centradas en la secuencia de contenidos matemáticos del currículo. |
| Decisiones conceptuales | Actividades centradas en el cambio de registro (modo de representación) o en la posibilidad de apoyar procesos cognitivos (tareas que exigen usar el conocimiento en nuevas situaciones). |

En la sección de resultados describimos, explicamos e ilustramos las características que definen cada una de las anteriores categorías.

## RESULTADOS

Presentamos los resultados en dos secciones, teniendo en cuenta cómo los estudiantes para profesor consideran *el desarrollo de la comprensión del concepto de límite de una función*: como dicotomía todo o nada (3 grupos) o reconociendo progresiones en el aprendizaje (2 grupos). Esta manera de considerar el desarrollo de la comprensión viene determinada por la identificación (o no) de la coordinación de las aproximaciones en el dominio y rango en los diferentes modos de representación, como un avance conceptual (KDU) que permite progresar a los estudiantes de bachillerato en su comprensión del concepto de límite. Las dos maneras en las que los estudiantes para profesor consideran la comprensión conllevan decisiones instruccionales distintas para ayudar a los estudiantes de bachillerato a progresar en su comprensión.

## La comprensión como dicotomía: *todo o nada*

Tres grupos de estudiantes para profesor (G2, G3 y G5) consideraron que los estudiantes de bachillerato:

- comprenden el concepto de límite funcional si son capaces de coordinar las aproximaciones en el dominio y en el rango, sean o no coincidentes los límites, en los diferentes modos de representación, y
- no comprenden el concepto de límite funcional si solo son capaces de considerar aproximaciones laterales en el caso de que la función esté definida en un punto (por tanto no coordinan las aproximaciones en ningún modo de representación).

Las respuestas que los estudiantes para profesor anticipan de la alumna hipotética de bachillerato que comprende la concepción dinámica de límite son correctas en los diferentes modos de representación. Sin embargo, para mostrar que no se comprende la concepción dinámica de límite, los estudiantes para profesor anticipan respuestas incorrectas en los diferentes modos de representación. Esto sugiere que estos estudiantes para profesor consideran la compresión del aprendizaje del límite de manera dicotómica (*todo o nada*). Además, no identifican la coordinación de las aproximaciones en el dominio y rango en los diferentes modos de representación como un avance conceptual (KDU), que permite progresar a los estudiantes de bachillerato en su comprensión del concepto de límite.

Por ejemplo, los estudiantes para profesor del G2, para la estudiante que comprende el concepto de límite (María) anticipan respuestas en las que coordina las aproximaciones de la variable $x$ en los distintos intervalos de definición y los valores que toma la función $f(x)$, en los tres modos de representación. La coordinación entre las aproximaciones en el dominio y el rango se manifiesta en el modo algebraico y gráfico a través del reconocimiento de las ramas de la función en los distintos intervalos y el establecimiento del límite de la función por coincidencia o no de los límites laterales (figura 2). En el modo numérico, esta coordinación se manifiesta cuando en los apartados b1 y b2 proponen la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango.

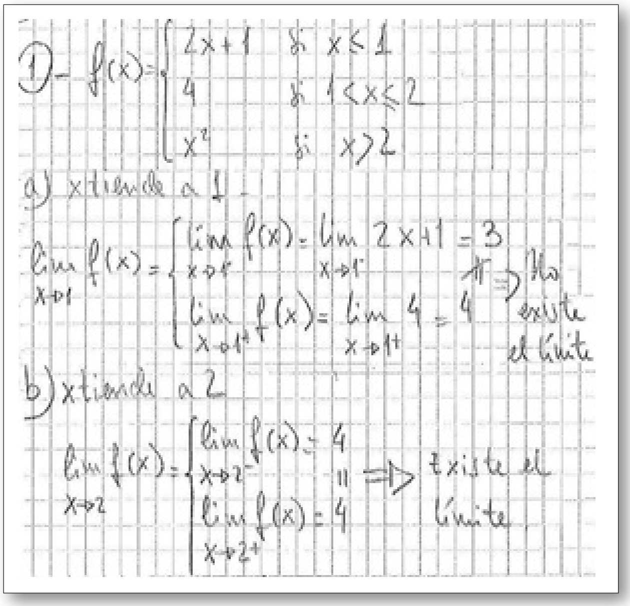



Fig. 2. Respuesta anticipada de G2 al problema 1 (modo algebraico) para María (estudiante que comprende el concepto de límite).

La justificación que da este grupo de estudiantes para profesor a la respuesta anticipada de María en el modo algebraico (figura 2; problema 1) es la siguiente (énfasis añadido):

> [María] Demuestra tener el concepto de función al utilizarlo correctamente a lo largo del ejercicio. Entenderíamos que no comprende el concepto si en el ejemplo eligiese siempre la misma rama o equivocadas. La idea de aproximación lateral en el dominio se corresponde con el hecho de que selecciona adecuadamente la rama de la función. La idea de aproximación en el rango se demuestra cuando sustituye en el límite por la aproximación de la variable independiente. *Demuestra coordinar cuando es capaz de establecer, según la rama, el valor del límite*. Finalmente, demuestra que entiende el concepto de límite y su existencia si comprueba la coincidencia de las aproximaciones calculadas en el rango.

En las respuestas que anticipan para el estudiante que no comprende la concepción dinámica de límite de una función en un punto (Pedro), consideran que el estudiante solo realizaría aproximaciones laterales donde está definida la función en el punto y asociaría el límite al valor de la función en el punto en los tres modos de representación. Así, para el modo algebraico indican:

> [Pedro] Presenta una idea de aproximación en el dominio (tanto por la derecha como por la izquierda) errónea cuando no selecciona de forma correcta la rama de la función eligiendo la que se corresponde con el valor al que tiende la variable independiente (figura 3).

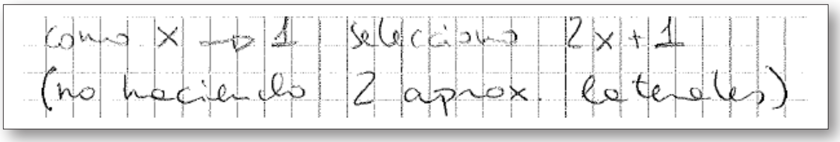



Fig. 3. Respuesta anticipada de G2 al problema 1 (modo algebraico) para Pedro.

Los estudiantes para profesor que consideran la compresión del aprendizaje del límite de manera dicotómica (*todo o nada*) no reconocen la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango como un avance conceptual (KDU) en el aprendizaje del concepto de límite. Además, estos estudiantes proponen decisiones instruccionales que no inciden en el progreso conceptual del estudiante, sino que se centran en decisiones generales sin la propuesta de actividades concretas. Por ejemplo, los estudiantes para profesor de G3, para ayudar a progresar a Pedro en su comprensión proponen lo siguiente (decisión general):

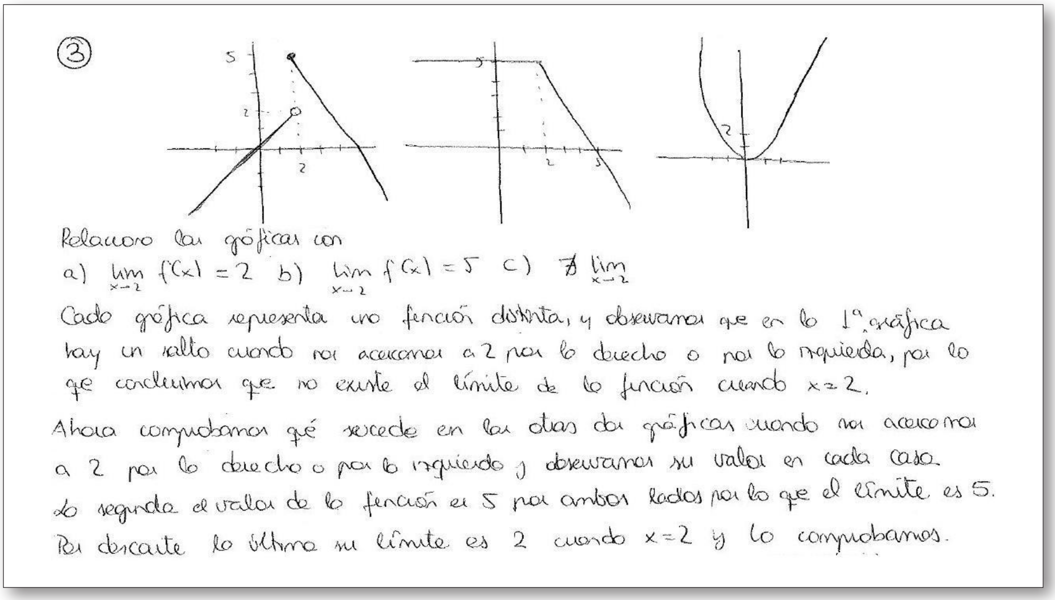
> Con Pedro tendríamos que empezar a explicarle los métodos gráficos para que entienda el concepto y luego pasar a expresiones algebraicas y representaciones mediante tablas.

## Reconocimiento de la progresión en el aprendizaje

G1 y G4 consideran que la comprensión del concepto del límite de una función en un punto por parte de los estudiantes de bachillerato es progresiva. Estos estudiantes para profesor consideran que la coordinación de las aproximaciones en el dominio y el rango se realiza de manera progresiva vinculada a los diferentes modos de representación. Esto se evidencia cuando anticipan que el estudiante de bachillerato coordina en uno de los modos de representación, pero puede tener dificultades en alguno de los otros modos, y cuando proponen decisiones de acción basadas en el uso de la coordinación en una situación nueva. Por tanto, estos estudiantes para profesor identifican la coordinación de las aproximaciones en el dominio y el rango en los diferentes modos de representación como un avance conceptual (KDU) en el aprendizaje del concepto de límite.

Por ejemplo, G1 anticipa respuestas que reflejan que el estudiante comprende la concepción dinámica de límite (respuestas para María) cuando coordina las aproximaciones a la variable $x$ en los distintos intervalos con los valores de la función $f(x)$, en el modo algebraico y gráfico, reconociendo las ramas de la función en los distintos intervalos; y en el modo numérico realizando las aproximaciones laterales en el dominio y en el rango (figura 4). Para el modo gráfico, escriben:

[María] Comprende la idea de función ya que sabe extraer de la representación gráfica toda la información. Al acercarse a 2 por ambos lados demuestra la idea de aproximación lateral (dominio) y al ver su valor en el rango. Por último, los coordina perfectamente ya que ha explicado correctamente su relación.


③

Relaciono las gráficas con

a) $\lim_{x \to 2} f(x) = 2$ b) $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$ c) $\nexists \lim_{x \to 2}$

Cada gráfica representa una función distinta, y observamos que en la 1ª gráfica hay un salto cuando nos acercamos a 2 por la derecha o por la izquierda, por lo que concluimos que no existe el límite de la función cuando $x = 2$.

Ahora comprobamos qué sucede en las otras dos gráficas cuando nos acercamos a 2 por la derecha o por la izquierda y observamos su valor en cada caso.

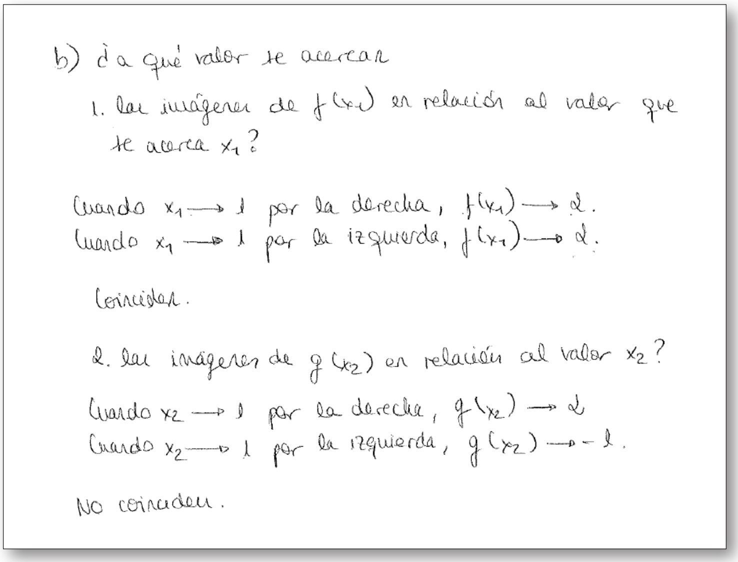
La segunda el valor de la función es 5 por ambos lados por lo que el límite es 5.

Por descarte la última su límite es 2 cuando $x = 2$ y lo comprobamos.

Fig. 4. Respuesta anticipada de G1 al problema 3 (modo gráfico) para María.

Este grupo de estudiantes para profesor considera que la coordinación de las aproximaciones en el dominio y el rango se realiza de manera progresiva en los diferentes modos de representación. Así, la respuesta anticipada para Pedro muestra que coordina las aproximaciones laterales en el dominio y en el rango en modo numérico (figura 5), pero no en modo algebraico (figura 6) y gráfico. Para el modo numérico anticipa una resolución correcta tanto del apartado a (aproximaciones en el dominio y en el rango) como del apartado b (coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango), explicando lo siguiente:

> En modo numérico, Pedro muestra una mayor comprensión de la idea de aproximación tanto en el dominio como en el rango, ayudándose de las tablas. Incluso coordina ambos procesos de aproximación tanto cuando coinciden los límites laterales como cuando no (apartado b).



b) ¿a qué valor se acercan

1. las imágenes de $f(x_1)$ en relación al valor que se acerca $x_1$?

Cuando $x_1 \to 1$ por la derecha, $f(x_1) \to 2$.
Cuando $x_1 \to 1$ por la izquierda, $f(x_1) \to 2$.

Coinciden.

2. las imágenes de $g(x_2)$ en relación al valor $x_2$?

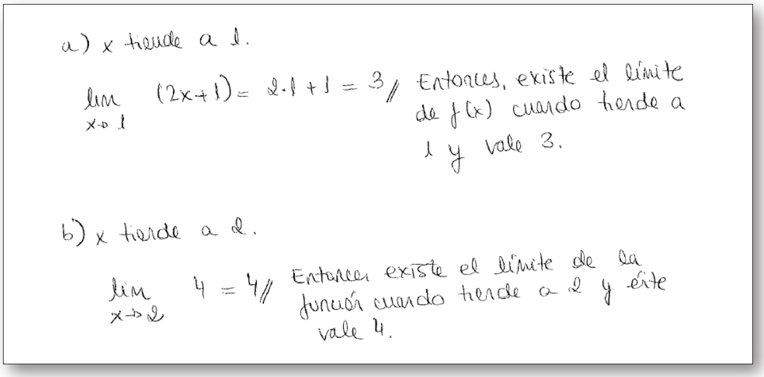
Cuando $x_2 \to 1$ por la derecha, $g(x_2) \to 2$
Cuando $x_2 \to 1$ por la izquierda, $g(x_2) \to -1$.

No coinciden.

Fig. 5. Respuesta anticipada de G1 al apartado b del problema 2 (modo numérico) para Pedro.

En modo algebraico anticipan dificultades porque Pedro no entiende lo que significa la aproximación en el dominio y en el rango y la coordinación de los procesos de aproximación. Se justifica la respuesta anticipada en la figura 6 de la siguiente manera:

> En la resolución en modo algebraico, Pedro tiene dificultades pues aunque puede entender la idea de función, no entiende lo que significa la aproximación en el dominio y en el rango y su coordinación. Él interpreta que resolver un límite es hallar el valor de la función en ese punto (en x = 1 y x = 2).



a) x tiende a 1.

$\lim_{x\to 1} (2x+1) = 2\cdot 1+1 = 3$ Entonces, existe el límite de $f(x)$ cuando tiende a 1 y vale 3.

b) x tiende a 2.

$\lim_{x\to 2} 4 = 4$ Entonces existe el límite de la función cuando tiende a 2 y éste vale 4.

Fig. 6. Respuesta anticipada de G1 al problema 1 (modo algebraico) para Pedro.

Estos estudiantes para profesor, que identifican la coordinación como un avance conceptual en la comprensión del concepto de límite, proponen decisiones de acción que apoyan la progresión de la comprensión del concepto de límite funcional. Toman decisiones basadas en contenidos curriculares y decisiones conceptuales, estas últimas relativas al cambio de modo de representación o al apoyo de procesos cognitivos.

Por ejemplo, G1 propone para María los dos problemas de la figura 7. En la propuesta 2 de esta figura se pide a María que, a partir de ciertas condiciones analíticas vinculadas con la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango, encuentre la gráfica de la función; para ello se deben invertir los procesos realizados (reversibilidad) en la construcción del significado de límite teniendo en cuenta todos los datos para hacer la representación gráfica pedida (decisión conceptual relativa al apoyo de procesos cognitivos). Esto implica el uso de la coordinación de las aproximaciones en una situación nueva. En la propuesta 1 de la figura 7, G1 introduce una función definida a trozos con salto infinito (decisión basada en la secuencia de contenidos curriculares).

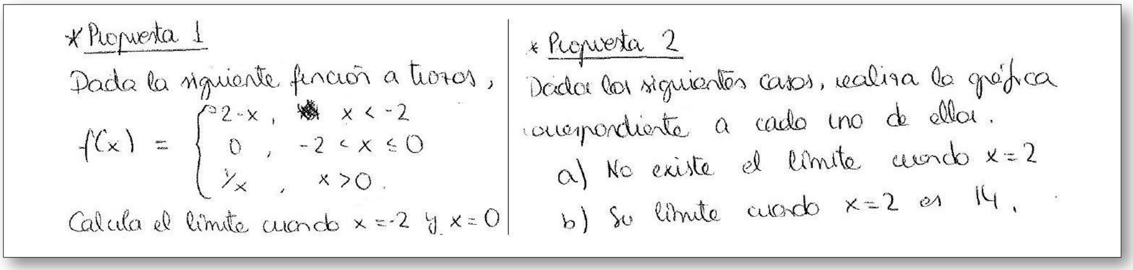



Fig. 7. Decisión de acción (pregunta C) propuesta por G1 para María.

La figura 8 ilustra la gradación pensada para ayudar a progresar a Pedro en su comprensión. G1 solicita determinar el límite de una función en modo gráfico, pidiendo primero una tabla de valores que permita hacer la gráfica de la función, y a partir de ella determinar a qué valor se acerca $f(x)$, indicando explícitamente cuando $x$ se aproxima por la derecha y por la izquierda. Se incide en la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango (apartado c) en los modos de representación que Pedro no comprende. Aquí estamos ante una decisión conceptual relativa a cambios de registro.

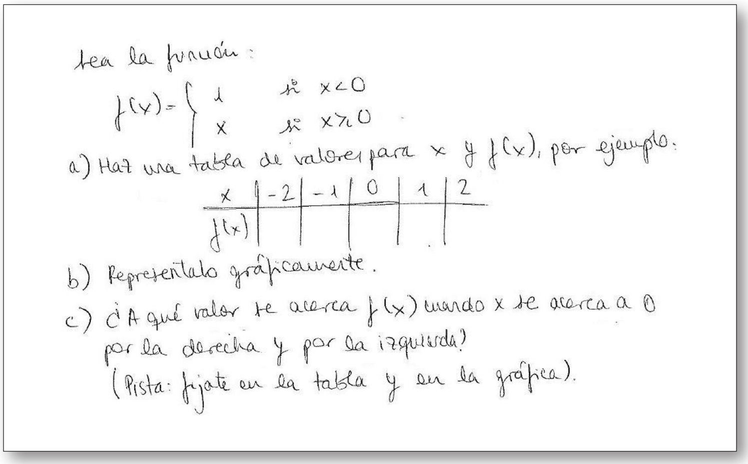



Fig. 8. Decisión de acción (pregunta C) propuesta por G1 para Pedro.

## DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Esta investigación ha generado conocimiento sobre cómo estudiantes para profesor de matemáticas de educación secundaria reconocen la coordinación de las aproximaciones en el dominio y el rango de una función como un avance conceptual (KDU), en la comprensión de los estudiantes de bachillerato del concepto de límite. Los estudiantes para profesor contestaron a una tarea donde tenían que anticipar posibles respuestas de estudiantes de bachillerato que reflejaran niveles de desarrollo conceptual de la comprensión del concepto.

Los resultados muestran dos formas de considerar la comprensión del concepto por parte de los futuros profesores, y el papel de la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango, como un avance conceptual en la generación de hipótesis sobre el pensamiento matemático de los estudiantes.

## Dos modos de considerar la comprensión del concepto de límite

Tres grupos de participantes consideran que la comprensión del concepto de límite de una función en un punto está relacionada con ser capaz de realizar aproximaciones en el dominio y en el rango y las coordinaciones de estas aproximaciones en los diferentes modos de representación. Estos estudiantes vinculan la falta de comprensión de la concepción dinámica de límite con ser capaz de realizar aproximaciones laterales en la rama donde está definido el valor de la función en el punto. Estos futuros profesores consideran la compresión del límite de una función de manera dicotómica (*todo o nada*) y tienen en cuenta, en sus anticipaciones, los elementos matemáticos que forman parte de la concepción dinámica del límite; sin embargo, no identifican la idea de coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango como un avance conceptual en la comprensión del concepto de límite (KDU en Simon, 2006). Esto es, consideran la dimensión matemática pero no la dimensión cognitiva, que es clave para ayudar a los estudiantes en su avance conceptual de la comprensión del concepto de límite. Interpretamos estos resultados como evidencia de las dificultades de estos estudiantes para profesor para relacionar conocimiento especializado de matemáticas (SCK) y conocimiento de las matemáticas y de los estudiantes (KCS) cuando generan hipótesis sobre el pensamiento matemático del estudiante.

Dos grupos consideran que la comprensión del concepto de límite de una función en un punto es progresiva. Esto se evidencia cuando: *i*) consideran que la consolidación de la comprensión del concepto de límite de una función en un punto está relacionada con ser capaz de usar la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango en una situación nueva para el estudiante, y *ii*) vinculan la falta de comprensión de la concepción dinámica de límite a realizar aproximaciones laterales y coordinaciones en algún modo de representación, pero no en todos. Estos participantes identifican la coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y en rango en diferentes modos de representación como un avance conceptual en el aprendizaje del concepto considerando la relación entre dimensión matemática del concepto de límite y dimensión cognitiva.

La diferencia entre las dos formas señaladas sugiere que los estudiantes para profesor deben llegar a ser conscientes de que el avance en la comprensión de los estudiantes de bachillerato depende de la coordinación de las aproximaciones en los diferentes modos de representación. Este hecho subraya la importancia del conocimiento del profesor sobre los elementos matemáticos importantes que subyacen en el concepto matemático, además de su conocimiento sobre el papel de algunos de ellos en el avance conceptual, en nuestro estudio, la coordinación de las aproximaciones en los diferentes modos de representación.

La identificación del papel de la coordinación de las aproximaciones en los diferentes modos de representación como un avance conceptual permitió a los estudiantes para profesor proponer decisiones instruccionales conceptuales relativas a cambios de representación o al apoyo de procesos cognitivos que requieren la idea de coordinación de las aproximaciones en nuevas situaciones. Este resultado es relevante ya que otras investigaciones en distintos dominios matemáticos han mostrado que los estudiantes para profesor tienen dificultad en proponer decisiones instruccionales que les ayuden a progresar en su comprensión conceptual. Por ejemplo: Schack *et al*. (2013) en la aritmética temprana, Magiera *et al.* (2013) en álgebra, Callejo y Zapatera (2017) en la generalización de patrones, Llinares *et al*. (2016) en la clasificación de cuadriláteros, Sánchez-Matamoros *et al*. (2015) en el concepto de derivada y Son (2016) con los conceptos de razón y proporción. En este sentido, Choy (2013) señala que es necesario que los profesores identifiquen e interpreten aspectos específicos del pensamiento matemático de los estudiantes, sin ser esto suficiente para mejorar la práctica. Nuestros resultados sugieren que si los estudiantes para profesor identifican el papel de algunos elementos matemáticos en la comprensión del concepto por parte del estudiante (es decir, identifican algunos KDU del concepto matemático), están en condiciones de proponer decisiones instruccionales centradas en la comprensión del estudiante.

Cabe destacar que estas dos maneras de comprender el desarrollo de la comprensión del concepto de límite ponen de manifiesto las referencias a través de las cuales se desarrolla el aprendizaje de los estudiantes para profesor. Estos resultados subrayan el desafío al que se enfrentan los formadores de profesores de matemáticas al tener que crear entornos de aprendizaje en los programas de formación que permitan a los estudiantes para profesor superar ciertas concepciones sobre el aprendizaje como *todo o nada*, al mismo tiempo que aprenden lo relativo al conocimiento de matemáticas y de los estudiantes.

### La coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango como KDU

Los grupos que consideran que la comprensión del concepto del límite de una función en un punto por parte de los estudiantes de bachillerato es progresiva identifican la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango como un avance conceptual en las respuestas que anticipan. La identificación de la idea de coordinación como clave en la progresión en el aprendizaje se evidencia a través de las respuestas que anticipan para el estudiante que no comprende el concepto, y por las propuestas de nuevas actividades centradas en que el estudiante progrese en su comprensión de la concepción dinámica del límite en los distintos modos de representación en una situación nueva. Estos resultados están en línea con lo obtenido en Llinares *et al*. (2016) por ser clave el reconocimiento de elementos matemáticos como puntos de referencia en el aprendizaje de los estudiantes para profesor sobre el pensamiento matemático de los estudiantes. En el caso de la concepción dinámica del límite, considerar la coordinación de los procesos de aproximación como un avance conceptual en los diferentes modos de representación ha permitido que los estudiantes para profesor anticiparan respuestas de estudiantes de bachillerato que mostraban diferentes características de la comprensión y propusieran decisiones de acción centradas en apoyar el avance conceptual.

Desde el punto de vista de la formación de profesores de matemáticas, esta investigación confirma la relevancia de construir el discurso profesional de los futuros profesores a partir de lo que se sabe en el área sobre el aprendizaje de los estudiantes de distintos niveles educativos, favoreciendo la reflexión sobre lo que se sabe y proporcionándoles oportunidades de aprendizaje que serán clave en su futura práctica profesional.

## RECONOCIMIENTO

Esta investigación ha recibido el apoyo en parte del Proyecto I+D+i, EDU2014-54526-R y de EDU2017-87411-R, financiados por el Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO), Gobierno de España y en parte del Proyecto GV/2015/115de la Conselleria de Educación, Cultura y Deporte de la Generalitat Valenciana.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Ball, D., Thames, M. y Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), pp. 389-407. https://doi.org/10.1177/0022487108324554.

Bartell, T. G., Webel, C., Bowen, B. y Dyson, N. (2013). Prospective teacher learning: recognizing evidence of conceptual understanding. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16(1), pp. 57-79. https://doi.org/10.1007/s10857-012-9205-4.

Bergqvist T. (2005). How students verify conjectures: Teachers' expectations. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(2), pp. 171-191. https://doi.org/10.1007/s10857-005-4797-6.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(3), pp. 219-236.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO*, 30, pp. 67-83.

Blázquez, S., Ortega, T., Gatica, S. y Benegas, J. (2006). Una conceptualización de límite para el aprendizaje inicial de análisis matemático en la universidad. *RELIME*, 9(2), pp. 189-209.

Callejo, M. L., Fernández, C., Sánchez-Matamoros, G. y Valls, J. (2014). Aprendiendo a reconocer evidencias del proceso de generalización de los estudiantes a través de un debate virtual. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 187-196). Salamanca: SEIEM.

Callejo, M. L. y Zapatera, A. (2017). Prospective primary teachers' noticing of students' understanding of pattern generalization. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 20, pp. 309-333. https://doi.org/10.1007/s10857-016-9343-1.

Choy, B. H. (2013). Productive Mathematical Noticing: What it is and why it matters. En V. Steinle, L. Ball y C. Bardini (eds.), *Proceedings of the 36th Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia* (pp. 186-193). Melbourne: MERGA.

Colera, J., Olivera, M. J., García, R. y Santaella, E. (2008). *Matemáticas I. Bachillerato.* Anaya.

Contreras, A. y García, M. (2015). Investigaciones sobre límites. En C. Azcárate, M. Camacho-Machín, M. T. González y M. Moreno (coords.), *Didáctica del Análisis Matemático: Una revisión de las investigaciones sobre su enseñanza y aprendizaje en el contexto de la SEIEM.* Servicio de publicaciones Universidad de La Laguna.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht: Kluwer. https://doi.org/10.1007/0-306-47203-1.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning whit a coordinated process scheme. *Journal of Mathematical Behavior*, 15, pp. 167-192. https://doi.org/10.1016/s0732-3123(96)90015-2.

Didis, M. G., Erbas, A. K., Cetinkaya, B., Cakiroglu, E. y Alacaci, C. (2016). Exploring prospective secondary mathematics teachers' interpretation of student thinking through analysing students' work in modelling. *Mathematics Education Research Journal*, 28, pp. 349-378. https://doi.org/10.1007/s13394-016-0170-6.

Espinosa, L. y Azcárate, C. (2000). Organizaciones matemáticas y didácticas en torno al objeto de «límite de función»: Una propuesta metodológica para el análisis. *Enseñanza de las Ciencias*, 18(3), pp. 355-368.

Fernández-Plaza, J. A., Ruiz-Hidalgo, F. J. y Rico, L. (2015). Razonamientos basados en el concepto de límite finito de una función en un punto. *Enseñanza de las Ciencias*, 33(2), pp. 211-229. https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.1575.

Fernández-Plaza, J. A. y Simpson, A. (2016). Three concepts or one? Students' understanding of basic limit concepts. *Educational Studies in Mathematics*, 93, pp. 315-332. https://doi.org/10.1007/s10649-016-9707-6.

Güçler, B. (2013). Examining the discourse on the limit concept in a beginning-level calculus classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 82, pp. 439-453. https://doi.org/10.1007/s10649-012-9438-2.

Herbst, P., Chazan, D., Chen, C., Chieu, V. M. y Weis, M. (2011). Using comics-based representations of teaching and technology to bring practice to teacher education courses. *ZDM-Mathematics Education*, 43(1), pp. 91-103. https://doi.org/10.1007/s11858-010-0290-5.

Imre, S. y Akkoç, H. (2012). Investigating the development of prospective mathematics teachers' pedagogical content knowledge of generalising number patterns through school practicum. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 15, pp. 207-226. https://doi.org/10.1007/s10857-012-9203-6.

Juter, K. (2010). Students' perceptions of limits. En B. Sriraman y otros (eds.), *The First Sourcebook on Nordic Research in Mathematics Education* (pp. 419-430). Charlotte, NC: IAP.

Kidron, I. (2010). Constructing knowledge about the notion of limit in the definition of the horizontal asymptote. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9(6), pp. 1261-1279. https://doi.org/10.1007/s10763-010-9258-8.

Lacasta, E. y Wilhelmi, M. (2010). Deslizamiento metadidáctico en profesores de secundaria. El caso del límite de funciones. En M. M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T. Sierra (eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 379-394). Lleida: SEIEM.

Llinares, S., Fernández, C. y Sánchez-Matamoros, G. (2016). Changes in how prospective teachers anticipate secondary students' answers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 12(8), pp. 2155-2170. https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1295a.

Magiera, M., van den Kieboom, L. y Moyer, J. (2013). An exploratory study of preservice middle school teachers' knowledge of algebraic thinking. *Educational Studies in Mathematics*, 84, pp. 93-113. https://doi.org/10.1007/s10649-013-9472-8.

Norton, A., McCloskey, A. y Hudson, R. A. (2011). Prediction assessments: Using video-based predictions to assess prospective teachers' knowledge of students' mathematical thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 14(4), pp. 305-325. https://doi.org/10.1007/s10857-011-9181-0.

Pons, J. (2014). *Análisis de la comprensión en estudiantes de bachillerato del concepto de límite de una función en un punto*. (Trabajo de tesis doctoral). Universidad de Alicante: Alicante.

Pons, J., Valls, J. y Llinares, S. (2012). La comprensión de la aproximación a un número en el acceso al significado de límite de una función en un punto. En A. Estepay otros (eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 435-445). Baeza: SEIEM.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C. y Llinares, S. (2015). Developing pre-service teachers' noticing of students' understanding of derivative concept. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 13(6), pp. 1305-1329. https://doi.org/10.1007/s10763-014-9544-y.

Schack, E., Fisher, M., Thomas, J., Eisenhardt, S., Tassell, J. y Yoder, M. (2013). Prospective elementary school teachers' professional noticing of children's early numeracy. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 16, pp. 379-397.
https://doi.org/10.1007/s10857-013-9240-9

Sen-Zeytun, A., Cetinkaya, B., y Erbas, A. K. (2010). Mathematics teachers' covariational reasoning levels and their predictions about students' covariational reasoning abilities. *EducationalSciences: Theory&Practice*, 10(3), pp. 1573-1612.

Sierra, M., González, M. T. y López, C. (2000). Concepciones de los alumnos de Bachillerato y Curso de Orientación Universitaria sobre el límite funcional y continuidad. *RELIME*, 3(1), pp. 71-85.

Simon, M. (2006). Key Developmental Understanding in mathematics: A direction for investigating and establishing learning goals. *Mathematical Thinking and Learning*, *8*(4), pp. 359-371.
https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0804_1.

Smith, M. S. y Stein, M. K. (2011). *5 practices for orchestrating productive mathematics discussions*. Reston: NCTM.

Son, J. (2013). How preservice teachers interpret and respond to student errors: Ratio and proportion in similar rectangles. *Educational Studies in Mathematics*, 84, pp. 49-70.
https://doi.org/10.1007/s10649-013-9475-5

Stahnke, R., Schueler, S. y Roesken-Winter, B. (2016). Teachers' perception, interpretation, and decision-making: a systematic review of empirical mathematics education research. *ZDM-Mathematics Education*, 48, pp. 1-27.
https://doi.org/10.1007/s11858-016-0775-y.

Strauss, A. y Corbin, J. (1994). Grounded theory methodology: An overview. En N. K. Denzin e Y. Lincoln (eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 273-285). Thousand Oaks: Sage.

Tall, D (1992). The transition to advanced mathematical thinking: Functions, limits, infinity, and proof. En D. A. Grouws (ed.), *Handbook of Researches on Mathematics Teaching and Learning* (pp. 495-511). New York: Macmillan.

Valls, J., Pons, J. y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(3), pp. 325-338.

Wilson, P. H., Sztajn, P., Edgington, C. y Myers, M. (2015). Teachers' uses of a learning trajectory in student-centered instructional practices. *Journal of Teacher Education*, 66(3), pp. 227-244.
https://doi.org/10.1177/0022487115574104.

# *Coordination of approximations* in the understanding of the limit concept when prospective teachers anticipate students' answers


Ceneida Fernández
Universidad de Alicante (España)
ceneida.fernandez@ua.es

Gloria Sánchez-Matamoros
Universidad de Sevilla (España)
gsanchezmatamoros@us.es

Mar Moreno
Universidad de Alicante (España)
mmoreno@ua.es

María Luz Callejo
Universidad de Alicante (España)
luz.callejo@ua.es



When prospective teachers think about how will students solve some mathematics problems, they should be able to recognise what is an evidence of the students' learning progressions. In this context, Llinares, Fernández, and Sánchez-Matamoros (2016) consider that the Key Developmental Understanding (KDU) construct proposed by Simon (2006) could be used to examine how Specialized Content Knowledge (SCK) and Knowledge of Content and Students (KCS) are related when prospective teachers generate hypotheses about the students' mathematical thinking, anticipating possible students' answers to problems.

A KDU implies a conceptual advance for students, that is, a change in the ability to think and/or perceive certain mathematical relationships (Simon, 2006). Therefore, a KDU becomes a key element for the development of a concept. From this perspective, to recognise students' learning progressions, it is necessary to know the mathematical elements whose understanding can be considered a conceptual advance. We hypothesise that when prospective teachers focus their attention on the KDUs of a concept, they can learn to generate hypotheses about how the students' mathematical understanding develops. A KDU in the understanding of the dynamic conception of limit is the coordination of the approximations in the domain and in the range in the different modes of representation. The aim of this study is to examine to what extent the identification of the coordination of approximations in the domain and in the range is considered a KDU by prospective teachers.

Twenty-five prospective secondary school mathematics teachers anticipated high school students' answers to problems about the limit of a function at a given point showing different characteristics of understanding and proposed problems that would support students' conceptual progress.

Results show that prospective teachers considered students' understanding of the limit of a function at a given point in two ways. On the one hand, some prospective teachers considered the understanding of the limit in a dichotomous way (all or nothing). These prospective teachers did not identify the coordination of the approximations in the domain and in the range as KDU. On the other hand, other prospective teachers considered the understanding of the limit as progressive. This was evidenced when: (i) they considered that the consolidation of the understanding of the limit of a function at a given point is related to being able to use the coordination of the approximations in the domain and in the range in a new situation, and (ii) they link the lack of understanding of the limit concept to the ability to coordinate in some modes of representation, but not in all. These prospective teachers identified the coordination of the approximations in the domain and in range in different modes of representation as a KDU in the learning of the concept.

Furthermore, the identification of the coordination of approximations in the different modes of representation as a KDU, allowed prospective teachers to propose conceptual decisions based on the students' understanding. This result is relevant since other investigations have shown that prospective teachers have difficulties in proposing instructional decisions to support students' conceptual progress in different mathematical domains.

Llinares, S., Fernández, C. & Sánchez-Matamoros, G. (2016). Changes in how prospective teachers anticipate secondary students' answers. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, 12(8), pp. 2155-2170.
https://doi.org/10.12973/eurasia.2016.1295a.

Simon, M. (2006). Key Developmental Understanding in mathematics: A direction for investigating and establishing learning goals. *Mathematical Thinking and Learning*, 8(4), pp. 359-371.
https://doi.org/10.1207/s15327833mtl0804_1.

Valls, J., Pons, J. & Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(3), pp. 325-338.